

# Al microscopio con gli occhi di Drude nella didattica della conduzione elettrica

Giuseppe Fera - Università di Udine - giuseppe.fera@uniud.it

*Abstract:* The Drude model is a high point in physics inquiry on electrical properties of metals and acts as a bridge not only between history and education but also between physics and chemistry raising important issues: What are the constituent particles of a metal? How we can describe their state and interactions? How we can conceptually connect the macroscopic laws of Ohm, Joule, Kirchhoff to microscopic processes?

An analysis in the framework of Model of Educational Reconstruction (Duit *et al.*, 2012) answers these questions by addressing: a) the common sense knowledge and the spontaneous conceptions of students; b) the clarification of the relationship between particles properties and processes with macroscopic physical quantities such as current, field, energy; c) the current in metals in terms of electric force on charge carriers.

*Keywords:* Drude model, physics education, electrical conduction

## 1. Le prime teorie sulla conduzione nei metalli e il modello di Drude

Le ricerche che affrontano nel quadro della fisica classica la questione del trasporto della carica elettrica nei solidi, in particolare nei metalli, iniziano con W. Weber a metà Ottocento e culminano nel 1900 con la formulazione del modello di Drude. Secondo Whittaker (1953), la teoria atomistica di Weber non aveva consentito progressi nella comprensione della conduzione nei metalli. Mancava un quadro teorico unitario nel quale ricondurre la diversa fenomenologia osservata: la conduzione della corrente secondo le leggi di Ohm del 1827, il riscaldamento Joule di un metallo percorso dalla corrente trovato nel 1848, l'effetto termoelettrico rilevato da Seebeck del 1822 e Peltier del 1834, l'effetto Hall del 1879, la relazione tra conducibilità elettrica, termica e temperatura stabilita dalla legge di Wiedemann e Franz del 1853.

Weber (1846-1848) riteneva che 'atomi elettrici' costituissero sia la materia che l'etere e utilizzava questa visione come base per spiegare tutti i fenomeni elettrodinamici in termini di interazioni tra atomi elettricamente carichi che agiscono a distanza. (Wilson 1953) Egli immagina che gli atomi di un metallo sono instabili e che particelle cariche sono continuamente espulse e riassorbite da esse ma non fa alcun tentativo di determinare i parametri fisici delle particelle (massa, dimensione, ecc.). Thomson nel 1888 propose una visione della corrente nei metalli come una serie di scariche intermittenti, dovute alla ridisposizione dei costituenti interni alle molecole.

Nonostante il prestigio di Thomson, i ricercatori all'epoca optavano per una diversa ipotesi, che gli interstizi tra gli atomi dei metalli fossero occupati in ogni istante da uno sciame di particelle, dotate di carica elettrica, in rapido movimento. In particolare Riecke nel 1898, sulla base della teoria degli ioni nella conduzione elettrolitica (Arrhenius 1887) e della teoria di Weber, assume la presenza nel metallo di differenti specie di particelle (con cariche positive e negative per rendere conto delle misure del coefficiente di Hall che in materiali come Zn indicavano la presenza di portatori di carica positivi), libere di muoversi negli interstizi tra gli atomi come le particelle di un gas. (Riecke 1898)

Nel 1900 Paul Drude semplifica e precisa alcuni aspetti del modello di Riecke, utilizzando la teoria elementare del trasporto per derivare le proprietà elettriche, termiche, ottiche dei metalli e ottenendo un migliore accordo con i risultati sperimentali. (Drude 1900) Egli propose che l'energia cinetica dei portatori di carica liberi fosse proporzionale alla radice quadrata della temperatura assoluta, assimilando i portatori di carica alle molecole di un gas perfetto classico. Anche Thomson aderì a questa ipotesi, avanzando l'idea che particelle con carica di segno diverso giocassero un differente ruolo nella conduzione, quelle positive solidali alla struttura del metallo e quelle negative, identificate come elettroni, in libero movimento nel metallo. Un convincente esperimento a sostegno dell'ipotesi di Drude e Thomson fu condotto da Tolman e Stewart nel 1916. Esso consiste nel misurare l'impulso di corrente suscitato dal rapido arresto di un disco metallico rotante ad alta velocità. (Tolman, Stewart 1916) Drude distingue in un metallo elettroni liberi e legati riconoscendo la presenza degli ioni reticolari e applica la teoria cinetica classica dei gas agli elettroni di conduzione del metallo, trattando le interazioni con gli ioni reticolari come urti tra molecole di un gas ideale. (Clausius 1857)

In accordo con quanto ipotizzato da Drude sullo stato di agitazione termica degli elettroni di conduzione in un metallo, Johnson (Johnson 1928) misura in un resistore con  $R=0,5 \text{ M}\Omega$  una corrente con valore medio nullo che però presenta una fluttuazione dell'ordine di 10 pA. Trova anche che la corrente misurata dipende dalla temperatura del resistore. La fluttuazione della corrente in un resistore non alimentato indica che gli elettroni responsabili della conduzione all'interno di un metallo sono in movimento caotico, come le particelle di un gas.

Tenendo presente che in assenza di tensione applicata al conduttore, il campo elettrico mediato sullo spazio e nel tempo è zero all'interno del conduttore (se così non fosse si avrebbero delle correnti in assenza di energia per sostenerle) Drude descrive le interazioni tra elettroni e ioni reticolari come urti tra sfere rigide. In una versione moderna, la dinamica può essere modellizzata dalla seguente equazione:

$$m \frac{dv}{dt} = -eE - m \frac{v}{\tau}$$

per il moto di un elettrone di conduzione di massa  $m$ , carica  $e$  in un filo metallico ove è presente un campo elettrico di intensità costante  $E$ . In questa equazione il termine  $-eE$  rappresenta la forza elettrica, mentre il termine  $-mv/\tau$  rappresenta la forza viscosa

dovuta alla interazione con gli ioni reticolari. Il parametro  $\tau$  esprime appunto il tempo libero medio dell'elettrone, ossia il tempo che in media intercorre tra un urto ed il successivo.

Questa equazione implica che, dopo un transiente di durata trascurabile, il moto dell'elettrone di conduzione è rettilineo uniforme nella direzione del campo (ma con verso opposto) con una velocità di deriva  $v_d$  espressa da:

$$v_d = -eE\tau/m.$$

È possibile interpretarla come una relazione causale tra campo elettrico (ovvero tensione,  $E=V/L$ ) e velocità di deriva (ovvero corrente,  $I/A=env_d$ , essendo  $n$  la concentrazione degli elettroni di conduzione). Se la si riscrive nella forma:

$$I/A = e^2 n \tau / m (V/L)$$

se ne deducono le due leggi di Ohm  $I=V/R$ ,  $R=\rho L/A$ . Si riconosce immediatamente che la grandezza  $\rho$  indica la resistività del materiale espressa in termini dei parametri microscopici:

$$\rho = m / n e^2 \tau.$$

Questa espressione per la resistività elettrica di un metallo fu ricavata per la prima volta da Drude nel 1900 e viene usata ancora oggi. (Lipperheide *et al.* 2001; Mizutani 2003; Chudnovsky 2007; Horng *et al.* 2011)

Uno dei maggiori successi della teoria di Drude fu la giustificazione teorica della legge di Wiedemann e Franz (Fig. 1) dove Drude ricondusse la costante che compariva in tale legge alle costanti fisiche fondamentali (costante di Boltzmann e carica dell'elettrone).

**Sind nur einfache Kerne vorhanden, deren Ladung  $\pm e$  ist, so folgt:**

$$(20) \quad \frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3} \left( \frac{\alpha}{e} \right)^2 T,$$

*d. h. es folgt das Wiedemann-Franz'sche Gesetz, dass das Verhältnis beider Leitfähigkeiten eine universelle Constante ist. Dieselbe ist proportional der absoluten Temperatur.*

**Fig. 1.** Dal lavoro originale di Drude (1900)

A tale scopo Drude assunse che la velocità di deriva fosse la media aritmetica delle velocità di un elettrone tra un urto e il successivo (Fig. 2).

Bei Wirkung einer Kraft  $X$  in einem beliebig langen Zeitraum fliegt also der Kern im Mittel so, als ob zu seiner unregelmässigen Geschwindigkeit  $u_1$  dazu käme eine dauernde  $x$ -Componenten seiner Geschwindigkeit, welche ist:

$$(12) \quad u_x = \frac{1}{2} e_1 X \frac{\tau_1}{m_1}.$$

Fig. 2. Dal lavoro originale di Drude (1900)

Si tratta di un errore che fu corretto da Lorentz (1905), peggiorando però l'accordo della teoria di Drude con i dati sperimentali. Tuttavia il modello di Drude è alla base dell'interpretazione moderna del legame metallico, come fu riconosciuto da un chimico importante come G. N. Lewis in un articolo pubblicato nel 1913. (Jensen 2009) Inoltre Drude spiega l'elevata riflettività dei metalli alle frequenze ottiche. Analizzando la risposta del gas elettronico ad un campo elettrico sinusoidale di frequenza  $\omega \gg 1/\tau$ , egli determina per l'indice di rifrazione l'espressione:

$$n^2(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \quad \omega_p = \frac{4\pi n e^2}{m}$$

che caratterizza la risposta ottica del metallo in termini di riflessione, trasmissione, assorbimento. La transizione dal comportamento completamente riflessivo (con  $\omega < \omega_p$ ) alla trasparenza (con  $\omega > \omega_p$ ) fu osservata nei metalli alcalini nel 1933. (Born *et al.* 1975)

## 2. Le diverse concezioni della conduzione elettrica nei metalli

Spesso l'insegnamento della fisica nelle scuole secondarie è inteso in senso trasmissivo di idee e principi generali, poco correlati ai fenomeni di base ed alle problematiche interpretative: ciò conduce gli studenti ad acquisire nozioni in modo mnemonico, in disaccordo con la necessità formativa di tipo scientifico, in cui la costruzione di conoscenze è basata sull'evidenza sperimentale e su pratiche scientifiche, quali la costruzione e l'impiego di modelli interpretativi della fenomenologia stessa. Non sempre viene riconosciuta l'importanza di esplicitare e discutere le idee spontanee degli studenti ai fini della costruzione di un solido apprendimento scientifico. Affrontare i ragionamenti degli studenti con consapevolezza della ricostruzione storica dell'impostazione interpretativa della fenomenologia può contribuire al superamento delle concezioni spontanee.

Molte ricerche mostrano che nel campo della conduzione elettrica gli studenti, anche alla fine del corso di studi, possono mantenere le loro concezioni alternative rispetto alla visione scientifica. Mulhall, McKittrick e Gunstone (Mulhall *et al.* 2001) riscontrano confusione tra carica elettrica vista come fluido o sostanza oppure come sinonimo di particella (elettrone, ione, ecc.). Gli studenti, come i primi studiosi,

tendono ad utilizzare modelli distinti per la carica elettrica: a) un fluido, b) composta da entità particellari che agiscono a distanza. La didattica deve affrontare il nodo dell'integrazione di questi modelli. La visione della carica come fluido continuo, alla base dell'opera di Maxwell, è riportata nei manuali in uso nelle scuole secondarie italiane. Tuttavia la carica elettrica, dal punto di vista fisico, ha una natura discreta che pone notevoli difficoltà: a) l'ipotesi di una struttura spazialmente estesa dell'elettrone lascia aperto il problema della stabilità; b) l'ipotesi di un elettrone puntiforme conduce alla divergenza fisicamente inaccettabile del campo elettromagnetico (problema dell'auto-energia dell'elettrone). Questo dilemma sarà superato nella descrizione quantistica di campi e particelle ad opera di Feynman (1949), ma va considerato anche nella pratica didattica ordinaria, in particolare quando nella scuola secondaria si affronta l'elettrolisi. Si riscontrano concezioni non in accordo con la visione scientifica; gli studenti affermano che: "la corrente elettrica produce gli ioni in soluzione durante l'elettrolisi". (Schmidt *et al.* 2007) Nel dibattito sull'origine degli ioni nella soluzione elettrolitica prevalse lentamente l'idea (Arrhenius 1887) che gli ioni esistessero prima del passaggio della corrente.

Gli studenti possono vedere la carica dell'elettrone come grandezza variabile in quanto la proprietà di caricarsi/scaricarsi dei corpi macroscopici viene estesa anche ad una particella elementare. Alla base di questa visione sta il contrasto tra tutta la fenomenologia osservata dell'elettrizzazione dei corpi macroscopici ed il concetto di carica elettrica come grandezza intrinseca delle particelle.

Le idee degli studenti sulle interazioni elettroni-reticolo mostrano che essi adottano il quadro di riferimento a loro familiare della legge di Coulomb ragionando in termini locali senza tener conto degli effetti globali di sovrapposizione dei campi di tutte le particelle presenti nel metallo. Essi quindi riutilizzano le conoscenze dell'elettrostatica come una lente deformante nell'interpretazione dei processi.

I ragionamenti degli studenti sullo spostamento della carica possono essere: "le cariche si spostano da dove ce n'è di più a dove ce n'è di meno". (Barbas, Psillos 1997) Alla base di questa idea c'è una visione matematica formale del potenziale elettrico utilizzando la quale gli studenti non riescono a stabilire relazioni significative dal punto di vista fisico tra tensione e corrente elettrica. Il quadro storico delle ricerche fisiche sulla natura della corrente elettrica svolte nell'800 evidenzia una situazione analoga.

Per quanto riguarda il legame metallico, studenti universitari, piuttosto che ragionare nella prospettiva del gas di elettroni liberi, costruiscono spontaneamente un modello di come gli atomi divengano donatori di elettroni: "I. non ci sono elettroni liberi prima di attaccare la batteria; II. l'energia della batteria spinge gli elettroni fuori dall'atomo, permettendo loro di muoversi nel filo conduttore". (Fera 2014)

Quindi gli studenti non considerano le proprietà del legame metallico, ma si concentrano sul comportamento del singolo atomo. Nella stessa ottica gli studenti spesso ritengono che gli elettroni di conduzione di un metallo siano fermi in assenza di corrente. (Wittman *et al.* 2002) La valenza didattica dell'esperimento di Johnson del 1928 per affrontare le concezioni spontanee degli studenti è stata evidenziata in Fera (2014).

### 3. Conclusioni

Il modello di Drude consente di esprimere la resistività di un metallo in funzione della carica, della concentrazione, della massa e del tempo libero medio dei portatori di carica. Pur essendo fondato sulla fisica classica, il modello descrive le proprietà elettriche dei conduttori metallici alimentati in corrente sia continua che alternata; esso fornisce, inoltre, una interpretazione della dipendenza della resistività dei metalli dalla temperatura. Può essere utilizzato per ottenere il valore del coefficiente di Hall e quindi per interpretare il moto orbitale dei portatori liberi di carica nei metalli in presenza di un campo magnetico.

Nella didattica, il modello di Drude può essere utilizzato per la sua semplicità concettuale, come preliminare per introdurre modelli fisici più completi e predittivi. Esso integra coerentemente la descrizione macroscopica della conduzione nei metalli basata sulle grandezze tensione/corrente con la visione particellare della materia. Infatti interpreta la resistività come manifestazione macroscopica dei processi di interazione tra elettroni di conduzione e reticolo ionico, chiarisce l'origine fisica della legge di Ohm in termini di una relazione causale campo elettrico-velocità di deriva dell'elettrone e chiarisce, infine, l'origine fisica della legge di Joule in termini di trasferimento di energia nelle interazioni elettroni-reticolo. Per queste caratteristiche consente di superare la visione locale degli studenti, come viene riconosciuto in letteratura. (Eylon, Ganiel 1990; De Posada 1997; Chabay, Sherwood 1999; Wittmann *et al.* 2002; Hart 2008) Esso consente di introdurre la descrizione in termini di sezione d'urto dei processi di interazione tra elettroni di conduzione e reticolo ionico, che è alla base della comprensione di fenomeni complessi come la superconduttività.

#### Ringraziamenti

Si ringrazia la prof.ssa Marisa Michelini per le utili discussioni e gli stimoli a guardare le proposte di diverso approccio al tema dal punto di vista didattico.

#### Bibliografia

- Arrhenius S. (1887). "Arbeiten über die Leitfähigkeit mit Kohlrauschs Konduktometer und Postulat der Dissoziation von Salzen in positive und negative Ladungsträger, Begründer der Dissoziationstheorie". *Zeitschrift für physikalische Chemie*, 1, pp. 631-648.
- Barbas A., Psillos D. (1997). "Causal reasoning as a base for advancing a systemic approach to simple electrical circuits". *Research in Science Education*, 27(3), pp. 445-459.
- Born M., Wolf E. (1975). *Principles of optics*. New York: Pergamon Press.
- Chabay R.W., Sherwood B.A. (1999). "A unified treatment of electrostatics and circuits" [online]. URL: <<http://matterandinteractions.org/Content/Articles/circuit.pdf>> [data di accesso: 15/05/2016].

- Chudnovsky E.M. (2008). “Theory of Spin Hall Effect: Extension of the Drude Model”. *Physical review letters*, 99 (20), p. 206601.
- Clausius R., (1857). “Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen”. *Annalen der Physik*, 176 (3), pp. 353-380.
- De Posada J. M. (1997). “Conceptions of High School Students Concerning the Internal Structure of Metals and Their Electric Conduction: Structure and Evolution”. *Science Education*, 81 (4), pp. 445-467.
- Drude P. (1900). “Zur Elektronentheorie der Metalle”. *Annalen der Physik*, 306 (1), pp. 566-613 e 306(3), pp. 369-402.
- Duit R., Gropengießer H., Kattmann U., Komorek M., Parchmann I. (2012). *The Model of Educational Reconstruction, a Framework for Improving Teaching and Learning Science*, in Jorde D., Dillon J. (ed.). *Science Education Research and Practice in Europe*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 13-37.
- Eylon B., Ganiel U. (1990). “Macro-micro relationship: the missing link between electrostatics and electrodynamics in students’ reasoning”. *International Journal of Science Education*, 12 (1), pp. 79-94.
- Fera G. (2014). *La didattica in prospettiva verticale delle proprietà di trasporto elettrico nei solidi: i modelli microscopici partendo dalla fenomenologia*. Tesi di dottorato, Università di Udine.
- Feynman R.P. (1949). “Space-time approach to quantum electrodynamics”. *Physical Review*, 76(6), pp. 769-789.
- Hart C. (2008). “Models in Physics, Models for Physics Learning, and Why the Distinction may Matter in the Case of Electric Circuits”. *Research in Science Education*, 38, pp. 529-544
- Horng J., Chen, C.F., Geng,B., Girit,C., Zhang,Y., Hao, Z., Bechtel H.A., Martin M., Zettl A., Crommie M.F., Shen Y.R, Wang F. (2011). “Drude conductivity of Dirac fermions in graphene”. *Physical Review B*, 83 (16), p. 165113.
- Jensen W.B. (2009). “The Origin of the Metallic Bond”. *Journal of Chemical Education*, 86, pp. 278-279.
- Johnson J.B. (1928). “Thermal agitation of electricity in conductors”. *Physical Review*, 32, pp. 97-109.
- Lipperheide R., Weis, T., Wille, U. (2001). “Generalized Drude model: unification of ballistic and diffusive electron transport”. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 13 (14), p. 3347.
- Lorentz H.A. (1905). “The motion of electrons in metallic bodies III”. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings, Series B, Physical Sciences*, 7, pp. 684-691.
- Mizutani U. (2003). *Introduction to the Electron Theory of Metals*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mulhall P., McKittrick B., Gunstone R. (2001). “A Perspective on the Resolution of Confusions in the Teaching of Electricity”. *Research in Science Education*, 31, pp. 575-587.
- Riecke E. (1898). “Zur Theory des Galvanismus und der Wärme”. *Annalen der Physik*, 66, pp. 353-389 e 545-581.

- Schmidt H.J., Marohn, A., Harrison, A.G. (2007). "Factors that prevent learning in electrochemistry". *Journal of research in science teaching*, 44 (2), pp. 258-283.
- Tolman R.C., Stewart T.D. (1916). "The electromotive force produced by the acceleration of metals". *Physical Review*, 8 (2), p. 97.
- Whittaker E.T. (1953). *A History of the Theories of Aether and Electricity*. London: T. Nelson.
- Wilson A.H. (1953). *The Theory of Metals*. London: Cambridge University Press.
- Wittmann M.C., Steinberg R.N., Redish E.F. (2002). "Investigating student understanding of quantum physics: Spontaneous models of conductivity". *American Journal of Physics*, 70 (3), pp. 218-226.