Considerazioni sul *Saggio di ricerca sull'intensità del lume* di Vittorio Fossombroni

Bruno Bruni - I.T.I.S. "Galileo Galilei", Arezzo - bru_to@inwind.it

Abstract: I will consider some topics contained in the book *Saggio di ricerche sull'intensità del lume* by Vittorio Fossombroni, published in Arezzo in 1781. In the first part I will give a short biographical sketch of Fossombroni who, born in Arezzo in 1754, was a Law scholar and a scientist, having worked on Economics, Mathematics, Physics and Hydraulics. He was in high repute in his fatherland, the *Granducato di Toscana*, his fame being related mainly to the final drainage of Val di Chiana. In the second part of the paper, instead, I will describe the most significant chapters of Fossombroni *Saggio*, where the problem of the attenuation of the intensity experienced by a light ray impinging on an arbitrary surface is considered, the attenuation being due to both distance and inclination. His reasoning is mainly geometric in nature.

Keywords: Vittorio Fossombroni, Granducato di Toscana, light attenuation

1. Introduzione

In questo Convegno della SISFA che si è svolto ad Arezzo e che ha avuto per tema la luce, abbiamo ritenuto opportuno parlare di un personaggio illustre di Arezzo che, tra le molte altre sue opere, ha scritto un saggio proprio sulla luce: si tratta di Vittorio Fossombroni e del Saggio di ricerca sull'intensità del lume pubblicato ad Arezzo nel 1781. Prima verrà mostrato, se pure sommariamente, un profilo del personaggio, per procedere poi alla descrizione di alcuni capitoli, quelli più significativi, del Saggio.

2. Nota biografica

Vittorio Fossombroni nacque ad Arezzo il 15 settembre 1754 da Giacinto e da Lucilla dei baroni Albergotti Siri, terzo di sette fratelli, morì a Firenze il 13 aprile 1844 e fu sepolto nella chiesa di S. Croce.[1]

Sotto la guida del padre, ricco antiquario di Arezzo, appassionato di matematica, fisica e astronomia, il giovane Vittorio si dedicò allo studio delle stesse discipline, am-

[1] Le informazioni sulla vita di Fossombroni sono dedotte prevalentemente da (Pazzagli 1997) e (Nagliati 2009).

pliando l'interesse anche all'economia, alla politica, all'ingegneria idraulica e alla giurisprudenza. Nel 1778 si laureò in giurisprudenza presso l'Università di Pisa. Durante gli studi pisani coltivò anche i suoi interessi scientifici mantenendo contatti con il fisico Pignotti e l'astronomo Perelli. Dopo la laurea, si trattenne per alcuni anni a Firenze, frequentando l'Accademia dei Georgofili della quale divenne socio, e dove frequentò un gruppo di studiosi, fra cui Fabbroni e Ximenes, approfondendo argomenti di matematica e di ingegneria idraulica, con particolare riferimento alla bonifica delle zone paludose, privilegiando il metodo delle colmate. In virtù di tali conoscenze nel 1782 ottenne dal Granduca Pietro Leopoldo (1765-1790) la nomina di Visitatore dei beni dell'ordine di Santo Stefano in Val di Chiana per approfondire le conoscenze di questa valle paludosa e in previsione della sua bonifica. Nel 1786 pubblicò il saggio *Studi sopra la distribuzione delle alluvioni* e nel 1789 il saggio *Memorie idrauliche-storiche sopra la Val di Chiana*. Il Granduca, avendo già letto l'anno precedente le bozze di questo saggio, nel 1788 lo nominò Soprintendente alla bonifica della Val di Chiana, carica che mantenne fino al 1828. Fossombroni dette un forte impulso per la bonifica della valle, portandola verso la bonifica definitiva; sono stati fondamentali lo studio storico e la pianificazione dei lavori, e a tal proposito risulta fondamentale l'ultima opera citata.[2] L'esperienza maturata in questo campo lo rese famoso in tutta Italia e anche all'estero, tantoché nel 1810 fu chiamato a presiedere la commissione per la bonifica dell'Agro romano e delle paludi Pontine, nel 1830 l'imperatore d'Austria gli commissionò uno studio sulla regolamentazione delle acque della laguna veneta e dei fiumi Brenta, Bacchiglione e Sile e perfino il viceré d'Egitto chiese il suo parere per la costruzione di un bacino idrico nel porto di Alessandria d'Egitto. Fossombroni si dedicò continuamente allo studio dell'idraulica producendo altre pubblicazioni sia di carattere teorico che pratico e fra queste sono da menzionare:

- *Della resistenza e dell'urto dei fluidi sopra alcune esperienze istituite nel 1795* (Fossombroni 1824, pp. 247-266);
- *Illustrazione d'un antico documento relativo all'originario rapporto fra le acque dell'Arno e quelle della Chiana* (Fossombroni 1824, pp. 331-364);
- *Relazione sopra il lago di Fucecchio* (Fossombroni 1824, pp. 297-308);
- *Saggio sulla bonificazione delle paludi pontine*, Verona. 1815;
- *Discorso sopra la Maremma* (Tartini 1838, pp. 367-376).

Fossombroni ebbe un ruolo fondamentale nella politica del Granducato di Toscana, avendo ricoperto ruoli fondamentali con tutti i reggenti che regnarono durante la sua lunga vita, e cioè Pietro Leopoldo (1765-1790), Ferdinando III (1790-1801,1814-1824), Leopoldo II (1824-1849) ed anche con Napoleone, durante l'occupazione francese (1801-1814), prima come regno d'Etruria (1801-1808) e poi come Impero (1808-1814). I ruoli ricoperti nei vari momenti furono:

- revisore delle stampe (1891) con nomina di Ferdinando III;
- ministro degli esteri (1796-1799) con nomina di Ferdinando III, ma su imposizione di Napoleone;
- Segretario di Stato nel 1798;

[2] Per maggiori informazioni sulla bonifica della Val di Chiana vedi (Bigazzi 2007).

- consigliere di Stato del Regno d'Etruria (1802);
- nel 1803 fu chiamato a presiedere la Deputazione finanziaria, divenendone poi il presidente;
- nel 1805 accettò il grado di Tenente generale delle truppe toscane e nel maggio fece parte della delegazione toscana inviata a Milano in occasione dell'incoronazione di Napoleone;
- nel 1808 fu nominato membro del Consiglio privato di Napoleone e successivamente Senatore dell'Impero e Conte, un titolo che avrebbe conservato anche dopo la Restaurazione e il ritorno di Ferdinando III;
- nel 1814 Ferdinando III incaricò Fossombroni a presiedere la commissione legislativa, poi divenne Segretario di Stato, Ministro degli Esteri, Direttore delle Segreterie Reali;
- alla morte di Ferdinando III, nel 1824, Fossombroni gestì il passaggio del Granducato a favore di Leopoldo II.

Per quanto riguarda l'economia Fossombroni fu un sostenitore della proprietà privata e del libero scambio; su incarico di Ferdinando III partecipò alla scrittura delle leggi relative alla libera esportazione:

- del pellame, della paglia per cappelli e dell'alabastro (1816);
- della lana greggia (1817);
- della seta greggia e dei bozzoli (1819).

Oltre a questi onerosi impegni politici e sociali, Fossombroni si occupò per tutta la vita anche di argomenti scientifici, concretizzati nella pubblicazione delle seguenti opere:

- *Memoria sulle equazioni irriducibili di terzo grado*, Giornale di Pisa, 1778;
- *Saggio di ricerche sull'intensità del lume*, Arezzo, 1781;
- *Saggio di alcune memorie sui terreni inclinati*, Pisa, 1788;
- *Saggio di un dilettante di matematica sull'equazioni di condizione e sopra l'invenzione della Brachistocrona*, Roma, 1791;
- *Memoria sopra il principio delle velocità virtuali*, Firenze, 1796.

Fossombroni fu insignito di numerose onorificenze, fra le tante possiamo ricordare:

- Cavaliere dell'ordine della Legion d'Onore;
- Ufficiale della Legion d'Onore;
- Commendatore dell'Ordine dei Santi Maurizio e Lazzaro;
- Cavaliere dell'Ordine Pour le Mérit;
- Conte dell'Impero.

Tra le molte associazioni di cui fece parte se ne ricordano alcune:

- Membro dell'Accademia Reale delle Scienze;
- Membro dell'Istituto di Francia;
- Membro dell'Imperiale Accademia di Pietroburgo;
- Membro dell'Istituto di Bologna;
- Membro della Società dei Quaranta.

3. Il *Saggio di ricerche sull'intensità del lume*

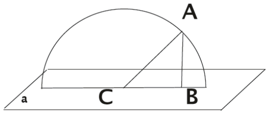
Procederò ora alla descrizione del *Saggio di ricerche sull'intensità del lume*. Il saggio studia come viene attenuata l'intensità di un raggio luminoso quando incide su una superficie; detta attenuazione dipende da due fattori:

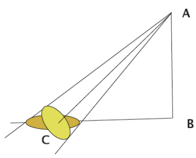
- è inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra la sorgente luminosa e la superficie illuminata;
- dipende dall'inclinazione del raggio luminoso rispetto alla superficie illuminata, come verrà precisato nel lemma.

Fossombroni non tiene in considerazione la natura della superficie riflettente, argomento che lascia trattare ad altri, come dichiara nell'ultimo capitolo. Il saggio si articola in otto capitoli che corrispondono ad altrettanti problemi, preceduti da un lemma generale. Descriverò in particolare, oltre al lemma, due problemi che sono i più importanti e rappresentativi di tutto il *Saggio*, e cioè il primo e il settimo. Di tali problemi verranno presentati anche due dispositivi pratici per verificare in via sperimentale i risultati dedotti in via teorica. Tali dispositivi non sono né descritti né menzionati nel saggio.

3.1. Lemma generale

Una sorgente luminosa puntiforme situata in un punto A, muovendosi in modo da mantenere costante la distanza dal punto C di un piano α, produce in C una illuminazione che dipende dall'inclinazione del raggio AC rispetto al piano α (Figg. 1 e 2).





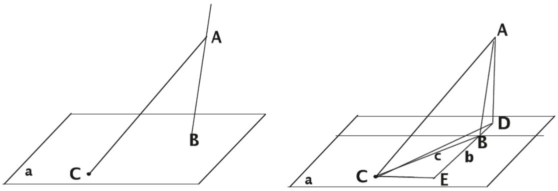
Figg. 1-2. Illuminazione da una sorgente puntiforme

$$I = k\frac{AB}{AC} = k\,sen(ACB)$$

Qui I è l'illuminazione e k una costante di proporzionalità che dipende dalla natura del piano α.

3.2. 1° Problema

Trovare, sulla retta AB, a quale distanza da B deve essere posta una sorgente luminosa affinché in un punto C di un piano α, comunque inclinato rispetto alla retta AB, si produca la massima illuminazione (Fig. 3).



Figg. 3-4. Costruzione per la massima illuminazione su di un piano

Con riferimento alla Fig. 4 si pongono le seguenti indicazioni, *x* incognita, *b* e *c* costanti:

AB = x
AD = mx m = sen(ABD)
BD = nx n = cos(ABD)
EB = b
CB = c
$CE^2 = CB^2\text{-}EB^2 = c^2 - b^2$
$CD^2 = CE^2+ED^2 = c^2 - b^2 + (b + nx)^2 = c^2 + 2nbx + n^2x^2$
CD = $\sqrt{c^2 + 2nbx + n^2x^2}$
CA = $\sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{c^2 + 2nbx + n^2x^2 + m^2x^2} = \sqrt{x^2 + 2nbx + c^2}$
L'illuminazione *I* è data dal rapporto AD/AC diviso per il quadrato della distanza CA.

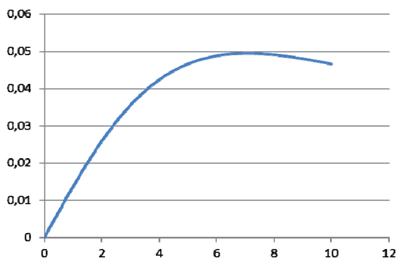


Fig. 5. Grafico della funzione di illuminazione

$$I = \left[\frac{mx}{\sqrt{x^2 + 2nbx + c^2}}\right]\left[\frac{1}{x^2 + 2nbx + c^2}\right]$$

$$I = \frac{mx}{\left(x^2 + 2nbx + c^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Questa è la funzione che esprime l'illuminazione *I* nel punto C il cui grafico è rappresentato in Fig. 5; derivando si ottiene:

$$I' = 2m\sqrt{x^2 + 2nbx + c^2}\left[x^2 + \frac{nbx}{2} - \frac{c^2}{2}\right]$$

Uguagliando a zero si ottiene:

$$\left[x^2 + \frac{nbx}{2} - \frac{c^2}{2}\right] = 0$$

Che ammette come soluzione:

$$x = -\frac{nb}{4} \pm \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{n^2b^2}{16}}$$

3.2.1. 1° Caso particolare

La retta AB è perpendicolare al piano α ed il punto C si trova ad una distanza *c* dal piede B della perpendicolare al piano. In questo caso si ha la migliore illuminazione nel punto C quando la distanza AB è:

$$x = AB = \frac{c}{\sqrt{2}} \cong c\ 0.707\ .$$

Nelle tre figure sono rappresentati tre casi simbolici:

- Fig. 6a: intensità ridotta per la notevole inclinazione,
- Fig. 6b: intensità ridotta per la distanza,
- Fig. 6c: intensità massima.

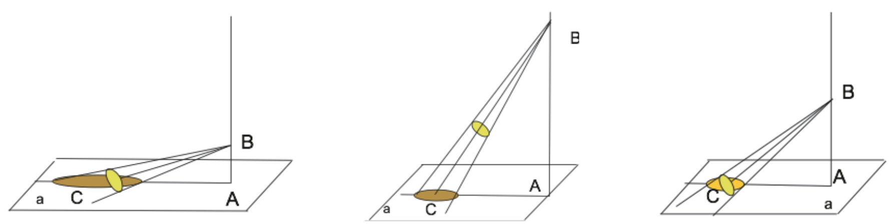


Fig. 6. Diversa intensità luminosa su di un piano (1° caso particolare)

Questo risultato teorico è confermato dall'esperienza pratica realizzata mediante un triangolo articolato dove una sorgente luminosa, posta nel vertice in alto, incide sul piano α materializzato nella piccola basetta rettangolare. Variando le distanze dei cateti, sia quello verticale che quello orizzontale, risulta confermato che l'illuminazione massima si verifica sempre quando il rapporto fra gli stessi è 0.7 (Figg. 7a-7c).

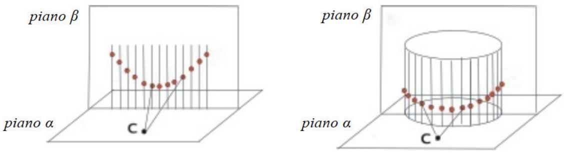
Fig. 7. Esperimento per verificare la diversa intensità luminosa su di un piano (1° caso particolare)

3.2.2. 2° Caso particolare

Su ogni retta di uno stesso piano β, i punti che danno la massima illuminazione nello stesso punto del piano α, formano un ramo di iperbole (Fig. 8).

3.2.3. 3° Caso particolare

Tutti i punti delle rette di una superficie rigata che danno la massima illuminazione nello stesso punto del piano α formano una linea nello spazio la cui equazione dipende dall'equazione della superficie considerata (Fig. 9).



Figg. 8-9. Intensità luminosa su di un piano (2° e 3° caso particolare)

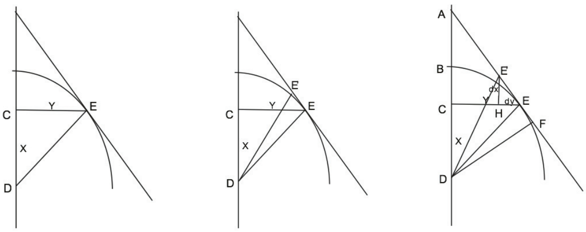


Fig. 10. Costruzione geometrica per determinare l'intensità di illuminazione

3.3. 7° Problema

Trovare la superficie che sia ugualmente illuminata da una sorgente luminosa puntiforme.

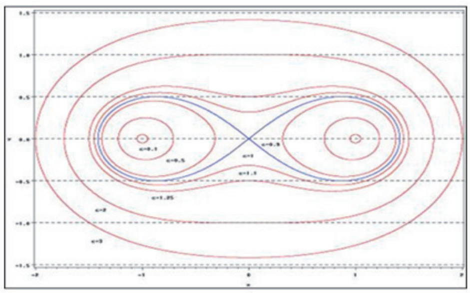
Con riferimento alla Fig. 10a, supponiamo che la sorgente luminosa sia posizionata nel punto D, origine degli assi *x,y*, e che l'intersezione della superficie cercata con questo piano sia la curva tracciata e anche che il raggio luminoso DE incida sulla superficie nel punto E. Se il raggio DE si sposta nel raggio DE` (Fig. 10b), aumentando la distanza dall'origine, la curva deve variare la sua curvatura per mantenere invariata l'intensità di illuminazione nel nuovo punto. Per trovare l'equazione della superficie occorre impostare una logica di carattere infinitesimale intorno al punto E, considerando incrementi infinitesimali *dx* e *dy* (Fig. 10c).

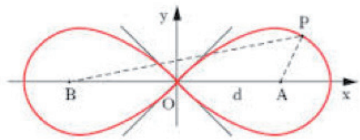
Ripercorrendo alcuni calcoli proposti nel *Saggio*, si giunge ad impostare l'equazione differenziale (le figure sono dedotte da quelle originali del *Saggio*) come segue.

DC = x

CE = y

DE = $\sqrt{x^2 + y^2}$





Figg. 11-12. Lemniscata e problema di Bernoulli

Dai triangoli simili ACE e dy, dx, EE` si ricava AD.

Y:(-dy)= AC:dx $\qquad$ AC = $-\, y \dfrac{dx}{dy}$

(-dy) : y = $\sqrt{dx^2 + dy^2}$: AE $\qquad$ AE = $-\dfrac{y}{dy}\sqrt{dx^2 + dy^2}$

Ricaviamo, quindi: AD = AC+x = $-\, y \dfrac{dx}{dy}$ +x

Dai triangoli simili ACE e AFD si ricava DF:

AE:EC= AD:FD

$$-\frac{y}{dy}\sqrt{dx^2+dy^2} : y = \left(-y\frac{dx}{dy}+x\right) : DF$$

$$\text{DF} = \frac{ydx - xdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

Si trova poi la funzione che esprime l'illuminazione nel punto E:

$$\text{I} = \frac{DF}{DE}\frac{1}{DE^2} = \frac{ydx - xdy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

Ponendo la funzione uguale ad una costante, per semplicità uguale ad 1, si ottiene l'equazione differenziale che risolve il problema:

$$\frac{ydx - xdy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{dx^2+dy^2}} = 1$$

Con una serie di passaggi, presenti nel *Saggio*, ma non riportati per economia di spazio, si ottiene la funzione che risolve il problema: la soluzione è la classica lemniscata di Jakob Bernoulli (Campedelli 1964, p. 60):

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$$

La lemniscata compare per la prima volta nel 1680 come caso particolare di una famiglia di curve studiate da Giovanni Cassini (1625-1712) nella ricerca delle orbite dei pianeti (Fig. 11).

Jakob Bernoulli (1654-1705) aveva dedotto questa curva come luogo geometrico, dandole il nome di Lemniscata (Fig. 12) e pubblicandola poi nel 1694 negli *Acta Eruditorum*, rivista periodica mensile di carattere scientifico pubblicato in Germania, non conoscendo il lavoro di Cassini.

Fossombroni ne deduce l'equazione percorrendo una strada completamente differente, mettendo in evidenza una proprietà della lemniscata del tutto inattesa. La Fig. 13 rappresenta un quarto di lemniscata e si nota che, mentre i vari raggi che escono dall'origine aumentano di lunghezza, aumenta pure l'angolo di incidenza; in tal modo mentre l'intensità di illuminazione decresce per la distanza, in ugual misura cresce per l'aumento dell'angolo. Il risultato è che questa curva mantiene costante l'illuminazione in ogni punto.

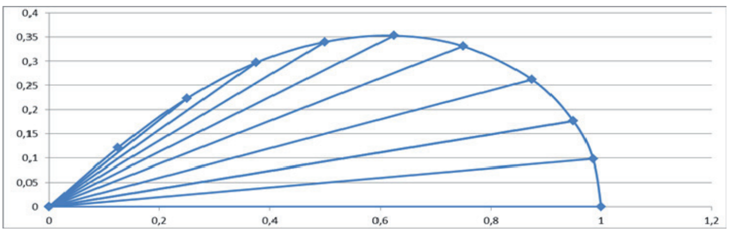


Fig. 13. Curva di costante illuminazione (quarto di lemniscata)

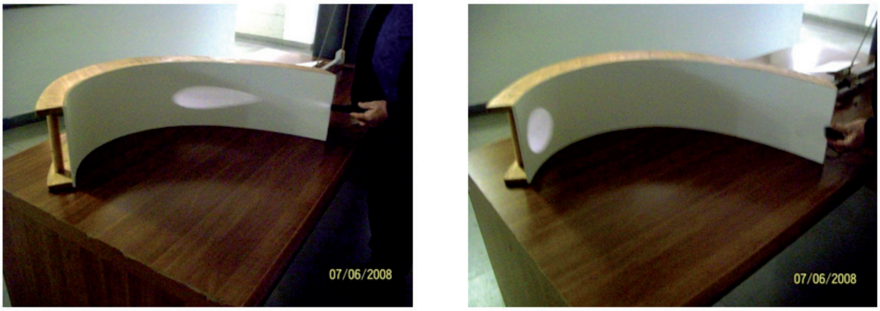


Fig. 14. Verifica sperimentale dell'illuminazione costante lungo un quarto di lemniscata

Anche in questo caso viene presentata una verifica pratica del risultato, utilizzando una superficie curvata secondo la forma di un quarto si lemniscata. Il risultato fornisce effettivamente uguale illuminazione al variare del raggio luminoso posto sempre nel centro della curva (Figg. 14a e 14b).

Bibliografia

Bigazzi A. (2007). *Bonifica della Val di Chiana.* Arezzo: Accademia Petrarca.

Campedelli L. (1964). *Esercitazioni di geometria analitica e proiettiva*. Padova: CEDAM.

Nagliati I. (2009). *Fossombroni V.*, in *Edizione Nazionale Mathematica Italiana - Notizie Biografiche*. Pisa: Scuola Normale Superiore.

Pazzagli C. (1997), *Fossombroni V.*, in *Dizionario Biografico degli Italiani*. Volume 49. Roma: Treccani, pp. 508-514.

Fossombroni V. (1781). *Saggio di ricerche sull'intensità del lume*. Arezzo: Bellotti.

Fossombroni V. (1824). *Opere idrauliche*. Bologna: Marsigli.

Tartini F. (1838). *Memorie sul bonificamento delle Maremme toscane*. Firenze: Molini.